

یک مدل زمان بندی حرکت قطارها با در نظر گرفتن زمان های توقف برای نماز

مسعود یقینی^{1*} و علی محمدزاده²

استادیار دانشکده مهندسی راه آهن - گروه حمل و نقل ریلی - دانشگاه علم و صنعت ایران
دانش آموخته کارشناسی ارشد حمل و نقل ریلی - دانشکده مهندسی راه آهن - دانشگاه علم و صنعت ایران
(تاریخ دریافت 89/7/24، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده 89/11/2، تاریخ تصویب 90/1/23)

چکیده

در ایران به دلیل نبود یک مدل جامع برای اعمال محدودیت توقف اجباری برای ادای فریضه نماز، زمان بندی حرکت قطارها به شکل دستی انجام می گیرد. در این مقاله، یک مدل ریاضی برای زمان بندی حرکت قطارهای مسافری برای محورهای دوخطه راه آهن با هدف حداقل کردن مجموع تأخیرات قطارها با در نظر گرفتن زمان های توقف اجباری برای ادای فریضه نماز ارائه شده است. نوآوری در مدل پیشنهادی، بررسی شرط لزوم توقف در ایستگاه های بین راهی دارای نمازخانه، برای قطارهای مسافری برای ادای فریضه نماز و انتخاب بهترین ایستگاه برای توقف است که باعث ایجاد کمترین تأخیر در مجموع زمان سیر قطارها می شود. برای ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی موضوع نمونه با ابعاد مختلف حل شده است. با ایجاد یک سیستم پشتیبان تصمیم و استفاده مدل پیشنهادی در آن، می توان زمان بندی حرکت قطارهای مسافری را به صورت مکانیزه انجام داد.

واژه های کلیدی: زمان بندی حرکت قطارها، قطارهای مسافری، محدودیت نماز، بهینه سازی

مقدمه

تا کنون پژوهش گران مدل ها و راه حل های متفاوتی را با توجه به شرایط خاص راه آهن ها برای زمان بندی حرکت قطارها ارائه کرده اند. هیگینز و همکاران [2] و [3] مدلی برای راه آهن استرالیا ارائه کرده اند. این مدل شامل بلاک های یک خطه و دو خطه بوده که با استفاده از الگوریتم ژنتیک² حل شده است. برای بهینه سازی زمان بندی حرکت قطارهای باری توسط کرای و هارکر [4] مدل دیگری ارائه شده است. رویکرد آن ها برقراری ارتباط بین برنامه ریزی تاکتیکی و عملیاتی زمان بندی حرکت قطارها است که زمان های هدف را برای استفاده در مدل های اعزام مستقیم فراهم می کند. مدل به زیر مسئله ای با متغیر پیوسته تبدیل می شود که با الگوریتمی ترکیبی از روش تجزیه و جریان شبکه ها حل می شود. قصیری و همکاران [5] برای مسئله زمان بندی دو تابع هدف، یکی از دید مسافر (کاهش مجموع زمان سفر) و دیگری از دید شرکت راه آهن (کاهش هزینه مصرف سوخت) در نظر گرفته شده اند. پینگ و همکاران [6] نیز دو تابع هدف را برای مسئله زمان بندی حرکت قطارها در نظر گرفته اند. دو تابع هدف مسئله عبارتند از امید ریاضی

امروزه یکی از شاخص های توسعه یافتگی کشورها، میزان رشد و پیشرفت صنعت حمل و نقل آن ها است. در این میان حمل و نقل ریلی با داشتن مزایایی چون امکان حمل و نقل انبوه و ارزان، آلودگی کمتر محیط زیست، مصرف سوخت بسیار کمتر و ایمنی بیشتر جایگاه ویژه ای دارد [1]. با توجه به سرمایه گذاری های سنگین برای توسعه حمل و نقل ریلی، استفاده بهینه از امکانات موجود در این صنعت اهمیت شایانی دارد. در این میان زمان بندی حرکت قطارها¹ نقش بسیار مهمی ایفا می کند که مورد توجه راه آهن های دنیا است. موضوع زمان بندی حرکت قطارها با توجه به وجود یک سری محدودیت ها، بهترین برنامه زمانی برای ورود و خروج قطارها به ایستگاه ها را تعیین کند، به طوری که کمترین هزینه را برای مسافران و نیز برای شرکت های مسافری داشته باشد. در ایران به دلیل وجود محدودیت توقف اجباری برای ادای فریضه نماز و نبود یک مدل جامع برای برآورده کردن محدودیت ذکر شده، زمان بندی حرکت قطارها توسط کارشناسان به صورت غیر مکانیزه انجام می گیرد.

شکل [15] یک چارچوب جدید برای استفاده یکپارچه از مدل‌های بهینه‌سازی و شبیه‌سازی برای زمانبندی حرکت قطارها ارائه کرده است. در روش ارائه شده، هدف، استفاده بهینه از ظرفیت خطوط شبکه راه‌آهن است. کو و همکاران [16] یک مدل مبتنی بر جریان شبکه چند کالایی برای زمانبندی قطارهای باری ارائه کرده‌اند. هدف مدل، کمینه‌کردن هزینه‌های عملیاتی است. در این مقاله یک الگوریتم مبتنی بر تولید ستون برای حل مدل ارائه شده، پیشنهاد شده است. الگوریتم ارائه شده در یک چارچوب مبتنی بر شبیه‌سازی عمل می‌کند.

همچنین مقالات متعددی درباره استفاده از تکنیک شبیه‌سازی برای تعیین سبقت و تلاقی قطارها ارائه شده است که می‌توان به چنگ [17] اشاره کرد. در فعالیت‌های پترسن و تیلور [18] و دورفمن و مدانیک [19] از تکنیک شبیه‌سازی برای ارزیابی تأخیرات قطارها استفاده شده است.

استفاده از تکنیک شبیه‌سازی اغلب برای تحلیل و ارزیابی برنامه‌های زمانبندی و مشخص کردن برخورد قطارها است. اما مدل ریاضی برای تصمیم‌گیری درباره رفع برخورد قطارها و تعیین بهترین حالت تلاقی و سبقت قطارها استفاده می‌شود.

موضوع زمانبندی حرکت قطارها به عنوان یک مسئله NP-Hard شناخته می‌شود که امکان به دست آوردن جواب بهینه برای مسائل پیچیده و با ابعاد بزرگ وجود ندارد. [20] و [21].

تا کنون در زمینه مدل‌سازی ریاضی، مسئله زمانبندی حرکت قطارها با در نظر گرفتن محدودیت توقف بین راهی برای نماز پژوهش‌های بسیار محدودی انجام شده است. بر اساس بررسی‌های انجام شده توسط نویسندگان مقاله، تنها تحقیقی که به این موضوع پرداخته است، مطالعه خادم ثامنی [22] است. خادم ثامنی یک مدل ریاضی زمانبندی حرکت قطارها ارائه کرده که در آن قطارها برای ادای فریضه نماز در اولین ایستگاه نمازخانه‌داری که می‌توانند برای نماز توقف داشته باشند، توقف خواهند کرد. در پژوهش خادم ثامنی فقط سعی شده است که محدودیت توقف بین راهی برای نماز برقرار باشد، بنابراین قطارها در اولین ایستگاهی که ممکن باشد، برای ادای فریضه نماز توقف می‌کنند و نه در بهترین ایستگاه ممکن که زمان کل سفرها را کمینه کند. اما در مدل ارائه شده

زمان انتظار قطارهای سریع و نیز کل زمان سفر قطارهای سریع و قطارهای سرعت متوسط، برای حل مسئله از روش فرا ابتکاری هوش جمعی استفاده شده است. در پژوهش دیگری قصیری و مرشد سلوک [7] مسئله زمانبندی حرکت قطارها را به صورت مسئله فروشنده دوره‌گرد³ مدل‌سازی کرده که در آن شهرها به مثابه قطارها هستند و فرض شده است که قطارها فقط از ایستگاه‌های ابتدایی و انتهایی اعزام می‌شوند. تابع هدف مسئله، حداقل کردن تأخیر قطارها در نظر گرفته شده است و الگوریتم مورچگان⁴ درصدد یافتن بهترین توالی اعزام قطارها است. پور سید آقایی [8] مسیر تک خطه تهران - اهواز که شامل 51 بلاک می‌شود را بررسی کرده است و با کمک روش‌های ابتکاری برای کاهش حجم مسئله به میزانی قابل حل توسط روش‌های دقیق، زمانبندی بهینه این مسیر به دست آمده است. آریانو و همکاران [9] یک شبکه راه‌آهن را با استفاده از شیوه زمانبندی کارگاهی مدلسازی کرده و با روش شاخه و حد حل کرده‌اند. کوزان و باردت [10] در مطالعه خود بار دیگر از روش زمانبندی کارگاهی⁵ استفاده کرده‌اند. لی و چن [11] با استفاده از یک الگوریتم فرا ابتکاری مسئله زمانبندی قطارها و مسیر یابی قطارها⁶ را به شکل ترکیبی حل کرده‌اند.

جو و جونگ [12] یک مدل ریاضی برای راه‌آهن‌های یک خطه برای کمینه‌کردن زمان کل سفر پیشنهاد کرده‌اند. در این مقاله یک مدل ریاضی مبتنی بر زمانبندی پروژه با منابع محدود و با اعمال محدودیت‌های ظرفیت ایستگاه و خط ارائه شده است.

در یکی از جدیدترین مقالات ارائه شده توسط کاستیلو و همکاران [13] یک مسئله زمانبندی حرکت قطارها برای شبکه‌های با خطوط یک خطه و خطوط یک خطه و دوخطه به صورت مخلوط مورد بررسی قرار گرفته است. هدف مسئله مورد بررسی، کمین کردن زمان سیر قطارهایی بوده که طولانی‌ترین زمان‌های سفر را داشته‌اند. یکی از تکنیک‌های پرکاربرد در زمینه زمانبندی حرکت قطارها، تکنیک شبیه‌سازی است که در ادامه به برخی از کارهای مهم انجام شده در این زمینه می‌پردازیم. در یکی از جدیدترین تحقیقات انجام شده توسط مورالی و همکاران [14] از روش شبیه‌سازی برای تخمین زمان تأخیر قطارها استفاده شده است.

است. همچنین مدت زمان توقف‌های اجباری و از پیش تعیین شده هر قطار، در ایستگاه‌های عبوری مسیر خود مشخص است. محدودیت دیگر، موضوع تلاقی قطارها است. طبق قوانین راه‌آهن ایران، هر بلاک، حداکثر توسط یک قطار می‌تواند اشغال شود و امکان وجود دو قطار در یک بلاک به طور هم‌زمان وجود ندارد. مهم‌ترین محدودیتی که در مدل پیشنهادی ارائه شده است، محدودیت توقف برای ادای فریضه نماز است، بدین معنی که قطارها موظف‌اند، در بازه‌های مجاز هر وعده نماز، در صورتی که لزوم توقف برای نماز مشخص شود، حتماً در یک ایستگاه نمازخانه‌دار توقف داشته باشند. به عنوان مثال اگر قطاری قبل از شروع بازه نماز صبح (یعنی لحظه اذان صبح) از مبدا خارج شده باشد و طبق برنامه زمان‌بندی خود، مشخص باشد که تا انتهای بازه نماز صبح (یعنی زمان طلوع آفتاب) به مقصد خود نخواهد رسید، حتماً باید فقط یک بار در یکی از ایستگاه‌های نمازخانه‌دار مسیر، در طول بازه مجاز برای ادای نماز صبح، توقف داشته باشد. قطارها با توجه به مدت زمان سفر خود، باید برای هر وعده نمازی که لزوم توقف آن حتمی و روشن شده است، توقف کنند، یعنی ممکن است یک قطار هم برای وعده نماز صبح، هم برای وعده نماز ظهر و عصر و هم برای وعده نماز مغرب و عشاء توقف داشته باشد. نکته دیگر این است که اگر مسافران فرصت کافی داشته باشند تا در ایستگاه مبدا یا در ایستگاه مقصد، نماز خود را به جا بیاورند، دیگر قطار موظف به توقف بین راهی برای فریضه نماز آن وعده نماز نیستند. به عنوان مثال اگر شروع بازه وعده نماز ظهر و عصر، ساعت 12:00 باشد و شروع حرکت قطار ساعت 15:00 باشد، به این دلیل که مسافران زمان کافی برای ادای نماز وعده ظهر و عصر را داشته‌اند، دیگر این قطار، موظف به توقف در یکی از ایستگاه‌های بین راه برای آن وعده نماز نیست. البته تعیین این زمان‌ها به عهده شرکت راه‌آهن است. به عنوان مثال اگر زمانی که قطار از مبدا خود خارج می‌شود، بیشتر از 60 دقیقه از اذان گذشته باشد، دیگر نیاز به توقف برای ادای نماز در بین راه نیست. به همین ترتیب اگر زمانی که قطار به مقصد خود می‌رسد، بیشتر از 60 دقیقه به قضا شدن نماز مانده باشد، باز هم نیاز به توقف برای ادای نماز در بین راه نبوده است. در نهایت هدف مدل ارائه شده، کاهش مجموع زمان سیر

در این مقاله، محدودیت توقف اجباری در بین مسیر برای ادای نماز طوری طراحی شده است که ایستگاه انتخابی برای توقف قطار برای نماز، باعث ایجاد کم‌ترین تأخیر در مجموع زمان سفر همه قطارها شود. به تعبیر دیگر این مدل، ایستگاه بهینه را برای توقف برای نماز انتخاب می‌کند.

زمان‌بندی حرکت قطارها یکی از مهم‌ترین فعالیت‌های برنامه‌ریزی در راه‌آهن محسوب می‌شود [1]. در صورت وجود یک مدل جامع در زمینه زمان‌بندی حرکت قطارها و ایجاد یک سیستم پشتیبان تصمیم، راه‌آهن جمهوری اسلامی ایران می‌تواند، زمان‌بندی حرکت قطارها را به صورت کامپیوتری و خودکار انجام دهد.

در ادامه، مطالب ارائه شده در مقاله به این صورت سازماندهی شده است: در بخش دوم، مسئله زمان‌بندی حرکت قطارها و فرضیه‌های در نظر گرفته شده در مطالعه حاضر بیان می‌شود. در این بخش به توضیح محدودیت توقف اجباری برای ادای فریضه نماز پرداخته شده است. سپس مدل ریاضی پیشنهادی مسئله زمان‌بندی حرکت قطارها با توجه به محدودیت نماز در بخش سوم مقاله بیان شده است. در بخش چهارم یک مثال با ابعاد کوچک به صورت مشروح و 11 مسئله نمونه ارائه و حل شده است. در انتهای مقاله، بخش نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادهایی برای مطالعات بعدی در نظر گرفته شده است.

بیان مسئله

یک محور دو خطه راه‌آهن را در نظر بگیرید، این محور شامل چندین ایستگاه است. در این محور یک مسیر اختصاص به قطارهای رفت و یک مسیر اختصاص به قطارهای برگشتی دارد، مانند یک بزرگراه که همه وسایل نقلیه فقط در یک مسیر اجازه حرکت دارند. در این مسئله همه قطارها، ایستگاه‌های مبدا و مقصد مشخصی دارند. برای همه قطارها زودترین و دیرترین زمان شروع به حرکت از مبدا، از پیش مشخص شده است. به این معنی که قطارها نمی‌توانند خارج از بازه زمانی مورد نظر، ایستگاه مبدا را ترک کنند. همچنین زمان طی بلاک‌ها توسط قطارها، با توجه به مشخصات ناوگان و مشخصات خط، از پیش تعیین شده است. این مسئله با فرض امکان متغیر بودن سرعت قطارها در بلاک‌ها در نظر گرفته شده

$LU_{k,n}$: دیرترین زمان مجاز برای توقف قطارها برای نماز نوبت n در ایستگاه k

TO_n : مدت زمان بعد از شروع بازه نماز نوبت n که مسافران امکان ادای فریضه نماز در ایستگاه مبدا را دارند.
 TD_n : مدت زمان قبل از پایان بازه نماز نوبت n که مسافران امکان ادای فریضه نماز در ایستگاه مقصد را دارند.

TI_n : مدت زمان توقف در ایستگاه‌های بین راهی برای ادای فریضه نماز نوبت n

M : یک عدد بسیار بزرگ می شود
 متغیرهای تصمیم:

$X_{i,k}^a$: زمان ورود قطار i به ایستگاه k

$X_{i,k}^d$: زمان خروج قطار i از ایستگاه k

$A_{i,j,b}$: اگر قطار i زودتر از قطار j وارد بلاک b شود، متغیر $A_{i,j,b}$ مقدار یک می‌گیرد و در غیر این صورت مقدار صفر خواهد گرفت. متغیر تصمیم $A_{i,j,b}$ تعیین می‌کند که از بین قطار i و j کدام یک ابتدا از بلاک b عبور می‌کند.

$YL_{i,k,n}$: اگر زمان رسیدن قطار i به ایستگاه k مساوی و یا بعد از $LL_{k,n}$ باشد، متغیر $YL_{i,k,n}$ مقدار یک می‌گیرد و در غیر این صورت مقدار صفر خواهد گرفت. متغیر تصمیم $YL_{i,k,n}$ تعیین می‌کند که آیا زمانی که قطار i به ایستگاه k می‌رسد، اذان نوبت n گفته شده است یا خیر؟ و آیا قطار i می‌تواند برای ادای نماز n در ایستگاه k توقف داشته باشد یا خیر؟

$YU_{i,k,n}$: اگر زمان رسیدن قطار i به ایستگاه k مساوی و یا قبل از $LU_{k,n}$ باشد، متغیر $YU_{i,k,n}$ مقدار یک می‌گیرد و در غیر این صورت مقدار صفر خواهد گرفت. متغیر تصمیم $YU_{i,k,n}$ تعیین می‌کند که زمانی که قطار i به ایستگاه k می‌رسد، آیا زمان ادا شدن نماز n باقی مانده یا به اتمام رسیده است؟ و قطار i می‌تواند برای ادای نماز n در ایستگاه k توقف داشته باشد یا خیر؟

$Y_{i,k,n}$: اگر زمان رسیدن قطار i به ایستگاه k در بازه زمانی مجاز برای ادای نماز نوبت n باشد، متغیر $Y_{i,k,n}$ مقدار یک می‌گیرد و در غیر این صورت مقدار صفر خواهد گرفت. متغیر تصمیم $Y_{i,k,n}$ تعیین می‌کند که زمانی که قطار i به ایستگاه k می‌رسد، در بازه زمانی‌ای است که می‌توان نماز نوبت n را در آن ایستگاه ادا کرد یا خیر؟

همه قطارها، از مبدا تا مقصد است. به طوری که همه محدودیت‌های مسئله برقرار شود.

مدل ریاضی پیشنهادی

در این بخش ابتدا به معرفی نمادها، مجموعه‌ها، عوامل و متغیرها پرداخته شده، سپس تابع هدف و محدودیت‌های عمومی معرفی شده و در انتها به توضیح تفصیلی محدودیت نماز پرداخته شده است.

علائم و نمادها

اندیس‌ها:

i : شمارنده قطارها ($i \in T$)

k : شمارنده ایستگاه‌ها ($k \in S$)

b : شمارنده بلاک‌ها ($b \in B$)

n : شمارنده وعده‌های نماز ($n \in N$)

مجموعه‌ها:

$I = \{1, \dots, m\}$: مجموعه قطارها،

$S = \{1, \dots, l\}$: مجموعه ایستگاه‌ها، B مجموعه

بلاک‌ها، $N = \{1, 2, 3\}$ مجموعه نمازهای روزانه، (صبح 1= ظهر و عصر 2= مغرب و عشا 3= و SP)

مجموعه ایستگاه‌های نماز خانه دار، $SP \subseteq S$ را نشان می‌دهد.

متغیرها

O_i : مبدا قطار i

D_i : مقصد قطار i

d_b : طول بلاک b

$V_{\min_{i,b}}$: حداقل سرعت مجاز قطار i در بلاک b

$V_{\max_{i,b}}$: حداکثر سرعت مجاز قطار i در بلاک b

ET_{O_i} : زودترین زمان مجاز برای خروج قطار i از مبدا

LT_{O_i} : دیرترین زمان مجاز برای خروج قطار i از مبدا

G_i : ضریب اولویت قطار i

$ST_{i,k}$: حداقل مدت زمان توقف پیش‌بینی شده قطار i

در ایستگاه k

$H_{i,j,b}$: حداقل مدت زمان هدوی قطارهای i و j در

بلاک b

$LL_{k,n}$: زودترین زمان مجاز برای توقف قطارها برای

نماز نوبت n در ایستگاه k

محدودیت‌های مدل ارائه شده برای مسئله زمان‌بندی حرکت قطارها، سعی دارند تا شرایطی ایمن برای حرکت قطارها فراهم آورند و از طرف دیگر شرایط برنامه‌ریزی تاکتیکی راه‌آهن را برای پاسخگویی به تقاضاهای سفر ایجاد کنند. محدودیت (2) پنجره زمانی حرکت از مبدا را برای قطار بیان می‌کند که بر اساس برنامه‌ریزی‌های تاکتیکی راه‌آهن و مطالعات تقاضای سفر است، به طوری که اعزام قطارها بتواند به تقاضاهای سفر به قطار پاسخ دهد. بدین ترتیب زمان حرکت هر قطار از مبدا باید بین زودترین و دیرترین زمان تعیین شده حرکت آن قطار باشد که این زمان‌ها به عنوان ورودی به مدل داده می‌شود.

$$ET_{O_i} \leq X_{i,O_i}^d \leq LU_{O_i} \quad (2)$$

$$\forall i \in I$$

محدودیت (3) بیان می‌کند که با توجه به شرایط خط و ناوگان، قطار مورد نظر i ، در چه بازه زمانی مجاز است که فاصله بلاک b را طی کند. در این محدودیت مسافت بین دو ایستگاه و نیز حداکثر و حداقل سرعت مجاز برای قطار i در بین هر دو ایستگاه متوالی، به عنوان ورودی به مدل داده می‌شود.

$$\left(\frac{d_b}{V_{\max_{i,b}}} \right) \leq X_{i,(k+1)}^a - X_{i,k}^d \leq \left(\frac{d_b}{V_{\min_{i,b}}} \right) \quad (3)$$

$$\forall i \in I, \forall b \in B$$

با توجه به برنامه‌ریزی‌های راه‌آهن و برآوردهای انجام‌شده از تقاضای سفر، قطارها باید در ایستگاه‌های خاصی توقف کنند تا مسافران سوار و پیاده شوند. هر چقدر درجه قطار پایین‌تر باشد، تعداد توقفات در ایستگاه‌های بین راهی بیشتر است. ممکن است برای بازرسی فنی قطار، آگیری قطار و ... نیز در صورت لزوم توقف‌هایی اجباری در مسیر پیش‌بینی شود. حداقل زمان توقف در ایستگاه‌های مختلف برای همه قطارها به صورت ورودی به مدل داده می‌شود. این مسئله در محدودیت (4) لحاظ شده است.

$$X_{i,k}^d - X_{i,k}^a \geq ST_{i,k} \quad (4)$$

$$\forall k \in S, k \neq O_i, D_i, \forall i \in I$$

در راه آهن ایران، به دلیل نبود سیستم بلاک متحرک و نیز سیستم کنترل خودکار قطار، بلاک‌ها، حد فاصل بین دو ایستگاه متوالی در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین به

$QL_{i,n}$: اگر زمانی که قطار i از ایستگاه مبدا خود خارج می‌شود، مساوی یا بیشتر از TO_n دقیقه از $LL_{k,n}$ گذشته باشد، متغیر $QL_{i,n}$ مقدار صفر می‌گیرد و در غیر این صورت مقدار یک خواهد گرفت. متغیر تصمیم $QL_{i,n}$ تعیین می‌کند که آیا مسافران قطار i قبل از حرکت قطار از مبدا، فرصت کافی برای ادای نماز نوبت n در ایستگاه مبدا داشته‌اند یا خیر؟

$QU_{i,n}$: اگر زمانی که قطار i به مقصد خود وارد می‌شود، مساوی یا کمتر از TD_n دقیقه به $LU_{k,n}$ مانده باشد، متغیر $QU_{i,n}$ مقدار صفر می‌گیرد و در غیر این صورت مقدار یک خواهد گرفت. متغیر تصمیم $QU_{i,n}$ تعیین می‌کند که آیا مسافران قطار i بعد از رسیدن قطار به مقصد، فرصت کافی برای ادای نماز نوبت n در ایستگاه مقصد را خواهند داشت یا خیر؟

$Q_{k,n}$: اگر با توجه به زمان‌های خروج از مبدا و ورود به مقصد، نیاز به توقف اجباری برای ادای نماز نوبت n در ایستگاه‌های بین راهی باشد، متغیر $Q_{k,n}$ مقدار یک می‌گیرد و در غیر این صورت مقدار صفر خواهد گرفت. متغیر تصمیم $Q_{k,n}$ تعیین می‌کند که آیا مسافران قطار i ، فرصت کافی برای ادای نماز نوبت n در ایستگاه‌های مبدا یا مقصد خود را دارند یا اینکه قطار لزوماً باید برای ادای نماز نوبت n در یک ایستگاه بین راهی توقف داشته باشد؟

$V_{i,k,n}$: اگر ایستگاه بین راهی k برای توقف قطار i برای ادای نماز نوبت n انتخاب شود، متغیر $V_{i,k,n}$ مقدار یک می‌گیرد و در غیر این صورت مقدار صفر خواهد گرفت. متغیر تصمیم $V_{i,k,n}$ تعیین می‌کند که آیا قطار i ، در ایستگاه k برای ادای نماز نوبت n توقف داشته باشد یا خیر؟

تابع هدف

حداقل کردن زمان تأخیر قطارها به عنوان تابع هدف مدل ارائه شده در نظر گرفته شده است:

$$\min z = \sum_{i=1}^m (G_i \times (X_{i,D_i}^a - X_{i,O_i}^d)) \quad (1)$$

$$\forall i \in I$$

محدودیت‌های کلی

و پس از ادای فریضه نماز بار دیگر سوار قطار شده تا قطار حرکت کند. اگر سفر قطار (از لحظه خروج از مبدا تا ورود به مقصد) با بازه نماز نوبت n تلاقی داشته، اما حرکت قطار پس از TO_n دقیقه (به عنوان مثال 60 دقیقه) بعد از آغاز وقت نماز نوبت n باشد، نیازی به توقف قطار برای نماز نوبت n نیست، زیرا مسافران فرصت کافی برای ادای نماز قبل از سفر با قطار را داشته‌اند. همچنین اگر قطاری زودتر از TD_n دقیقه (به عنوان مثال 60 دقیقه) مانده به قضا شدن نماز وعده n به مقصد برسد، لازم نیست قطار برای ادای نماز وعده n در بین راه توقف داشته باشد، زیرا مسافران فرصت کافی دارند تا پس از پیاده شدن از قطار به ادای نماز بپردازند. البته زمان‌های TO_n ، TI_n و TD_n ، توسط راه آهن تعیین شده و به عنوان عوامل ورودی مدل محسوب می‌شوند.

برای هر یک از وعده‌های نماز، یک بازه زمانی وجود دارد. به عنوان مثال بازه نماز نوبت ظهر و عصر، از اذان ظهر است (مثلاً ساعت 12:00) تا نیم ساعت مانده به قضا شدن نماز ظهر (مثلاً ساعت 18:00). در واقع توقف برای هر نوبت نماز باید در بازه آن نوبت باشد. برای تعیین بازه‌ها برای هر نوبت نماز، از دو عامل ورودی $LL_{k,n}$ (ابتدای بازه) و $LU_{k,n}$ (انتهای بازه) استفاده شده است. مدلسازی محدودیت توقف نماز در 3 بخش انجام شده است. بخش اول، تشخیص برقرار شدن شرط نماز در بین مسیر، بخش دوم، تشخیص لزوم توقف بین راهی برای ادای نماز و بخش سوم، توقف برای نماز است.

مشکل و دشواری اصلی مدلسازی این محدودیت و تفاوت ذاتی آن با سایر محدودیت‌های مسئله زمان‌بندی حرکت قطارها، شرط ضمنی بودن آن است. بدین معنی که از ابتدا مشخص نیست که یک قطار حتماً باید برای نماز توقف داشته باشد یا خیر. به عبارت دیگر، تا قبل از حل مسئله زمان‌بندی حرکت قطارها و تعیین زمان ورود قطارها به ایستگاه‌ها و خروج آن‌ها از ایستگاه‌ها، مشخص نیست که آیا قطار لازم است در بین راه برای نماز توقف داشته باشد یا خیر؟ از طرف دیگر، توقف برای نماز روی زمان ورود قطارها به ایستگاه‌ها و خروج قطارها از ایستگاه‌ها تأثیرگذار است. بنابراین این ارتباط به طور کامل دو طرفه است. برای رفع این مشکل باید محدودیتی قرار داده شود که در صورت برقراری شرایط نماز، فعال شده و توقف TI_n دقیقه‌ای را ایجاد کند و در غیر این

منظور تأمین شرایط ایمن، در هر بلاک حداکثر یک قطار می‌تواند وجود داشته باشد. محدودیت‌های (5) و (6) تضمین می‌کند که هیچ تصادفی بین قطارها روی ندهد.

$$(M \times A_{i,j,b}) + X_{i,k}^d \geq X_{j,k+1}^a + H_{i,j,b} \quad (5)$$

$$\forall i, j \in I, \forall b \in B$$

$$(M \times (1 - A_{i,j,b})) + X_{j,k}^d \geq X_{i,k+1}^a + H_{i,j,b} \quad (6)$$

$$\forall i, j \in I, \forall b \in B$$

از آنجا که فرض مسئله و مدل، برنامه‌ریزی برای مسیرهای دوخطه است، بنابراین در هر خط قطارها فقط در یک برای حرکت می‌کنند و فقط امکان تصادف بین قطارهای هم برای وجود دارد. همان طور که پیش‌تر اشاره شد، برای ساده‌تر شدن مدل، بدون از دست رفتن کلیت آن، فقط مسیر رفت در نظر گرفته می‌شود. واضح است که برای تولید برنامه زمان‌بندی مسیر برگشت فقط باید اندیس‌های مدل را تغییر داد. دو دسته محدودیت برای عدم تلاقی قطارها پیش‌بینی شده است. دسته اول محدودیت‌ها تضمین می‌کند که فقط هنگامی قطار i می‌تواند وارد بلاک b شود که از زمان خروج قطار j از بلاک b حداقل زمانی برابر $H_{i,j,b}$ گذشته باشد. (در این حالت متغیر $A_{i,j,b}$ مقدار صفر خواهد داشت) و دسته دوم محدودیت‌ها تضمین می‌کند که فقط هنگامی قطار j می‌تواند وارد بلاک b شود که از زمان خروج قطار i از بلاک b حداقل زمانی برابر $H_{i,j,b}$ گذشته باشد. (در این حالت متغیر $A_{i,j,b}$ مقدار یک خواهد داشت) این دو دسته محدودیت طوری طرح شده‌اند که همواره یکی و فقط یکی از آن‌ها برقرار خواهد بود، بنابراین این دو دسته تضمین خواهد کرد که هیچ گاه بین دو قطار عبوری از یک بلاک، برخوردی به وجود نیاید.

مدلسازی محدودیت نماز

برای مدلسازی محدودیت نماز، ابتدا به شرح دقیق مسئله می‌پردازیم. توقف قطارها برای نماز در سه بازه زمانی انجام می‌گیرد: (1) توقف برای نماز صبح، (2) توقف برای نماز ظهر و عصر، (3) توقف برای نماز مغرب و عشاء. در صورتی که قطار i در بازه زمانی مربوط به هر یک از نمازها در حال حرکت باشد، باید در ایستگاهی که نمازخانه داشته باشد، به مدت TI_n دقیقه (به عنوان مثال 20 دقیقه) توقف کند تا مسافران از قطار پیاده شده

ولی در محدودیت (9) متغیر $YL_{i,k,n}$ باید صفر باشد. در صورتی که $X_{i,k}^a$ از $LL_{k,n}$ بزرگ‌تر یا مساوی باشد، در محدودیت (9) متغیر $YL_{i,k,n}$ می‌تواند صفر یا یک باشد، ولی در محدودیت (8)، متغیر $YL_{i,k,n}$ باید یک باشد.

متغیر دیگری که در مدل تعریف شده $YU_{i,k,n}$ است که بررسی می‌کند آیا شرط $X_{i,k}^a \geq LU_{k,n}$ برقرار است یا خیر؟ به عبارت ساده‌تر، مقدار متغیر $YU_{i,k,n}$ نشان می‌دهد که آیا زمان رسیدن قطار i به ایستگاه k ، قبل از انتهای بازه نماز نوبت n بوده است یا خیر؟ این شرط بیان می‌کند که اگر قطار i قبل از انتهای بازه نماز نوبت n به ایستگاه k رسیده باشد، متغیر $YU_{i,k,n}$ مقدار یک می‌گیرد و در غیر این صورت مقدار صفر. این شرط به صورت محدودیت‌های (10) و (11) به مدل ریاضی اضافه شده است.

$$X_{i,k}^a \leq LU_{k,n} + (M \times (1 - YU_{i,k,n})) \quad (10)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N, \forall k \in S_p, k \neq D_i, D_j$$

$$X_{i,k}^a > LU_{k,n} - (M \times YU_{i,k,n}) \quad (11)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N, \forall k \in S_p, k \neq D_i, D_j$$

نحوه عملکرد محدودیت‌های (10) و (11) مانند محدودیت مربوط به متغیر $YL_{i,k,n}$ است. با اعمال محدودیت‌های (8)، (9)، (10) و (11) می‌توانیم دریابیم که زمان رسیدن قطار i به ایستگاه k ، چه نسبتی با ابتدای بازه نماز و چه نسبتی با انتهای بازه نماز دارد. با یک مثال این مطلب تشریح می‌شود. فرض کنید زمان ورود قطاری به ایستگاه‌های مختلف به شرح زیر و ابتدای بازه نماز نوبت ظهر ($LL_{k,n}$) ساعت 12:00 و انتهای بازه نماز ظهر ($LU_{k,n}$) ساعت 18:00 باشد. با اعمال محدودیت (8) و (9) سطر سوم جدول حاصل می‌شود و با اعمال محدودیت‌های (10) و (11) سطر چهارم جدول حاصل می‌شود.

صورت عمل نکند. در واقع مدل طوری طراحی شده است که تعیین می‌کند، قطار i هنگامی که به ایستگاه k می‌رسد، آیا در بازه زمانی‌ای است که می‌تواند برای نماز نوبت n توقف داشته باشد، یا خارج از آن بازه است. این موضوع توسط متغیر صفر و یک $Y_{i,j,k}$ تعیین می‌شود، اگر زمان رسیدن قطار i به ایستگاه k ($X_{i,k}^a$) در بازه زمانی‌ای است که می‌تواند برای نماز نوبت n توقف داشته باشد، این متغیر مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد (به صورت رابطه (7)).

$$\text{IF } LL_{k,n} < X_{i,k}^a < LU_{k,n} \quad (7)$$

$$\text{THEN } Y_{i,k,n} = 1$$

$$\text{ELSE } Y_{i,k,n} = 0$$

نکته قابل تأمل در طراحی رابطه (7) این است که به طور مستقیم نمی‌توان مدل خطی‌ای برای شرط ذکرشده ایجاد کرد، یعنی نمی‌توان مدلی نوشت که در آن یک متغیر، هم بتواند شرط $X_{i,k}^a < LL_{k,n}$ و هم شرط $X_{i,k}^a < LU_{k,n}$ را بررسی کند. بنابراین دو متغیر جدید تعریف شده است که هر یک، یکی از شرط‌ها را به تنهایی بررسی می‌کند و سپس با استفاده از دو متغیر جدید، می‌توانیم به مقصود خود برسیم. یکی از این متغیرها $YL_{i,k,n}$ است که بررسی می‌کند که شرط $X_{i,k}^a < LL_{k,n}$ برقرار است یا خیر؟ به عبارت ساده‌تر مقدار متغیر $YL_{i,k,n}$ نشان می‌دهد که زمان رسیدن قطار i به ایستگاه k ، آیا بعد از ابتدای بازه نماز نوبت n بوده است یا خیر؟

این شرط بیان می‌کند که اگر قطار i بعد از ابتدای بازه نماز نوبت n به ایستگاه k رسیده باشد، متغیر $YL_{i,k,n}$ مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد. این شرط به صورت محدودیت (8) و (9) تبدیل شده است.

$$X_{i,k}^a < LL_{k,n} + (M \times YL_{i,k,n}) \quad (8)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N, \forall k \in S_p, k \neq D_i, D_j$$

$$X_{i,k}^a \geq LL_{k,n} - (M \times (1 - YL_{i,k,n})) \quad (9)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N, \forall k \in S_p, k \neq D_i, D_j$$

در صورتی که $X_{i,k}^a$ از $LL_{k,n}$ کوچک‌تر باشد، در محدودیت (8)، متغیر $YL_{i,k,n}$ می‌تواند صفر یا یک باشد،

جدول 1: یک مثال عددی از عملکرد محدودیت توقف برای نماز

Stations	...	4	5	6	7	...	20	21	22	23	24	...
$X_{i,k}^a$	...	10:30	11:15	12:00	12:30	...	16:00	17:00	18:00	18:45	19:10	...
$YL_{i,k,n}$	...	0	0	1	1	...	1	1	1	1	1	...
$YU_{i,k,n}$	...	1	1	1	1	...	1	1	1	0	0	...

تا این مرحله با اعمال محدودیت‌های (8)، (9)، (10)، (11)، (13) و (14)، همه ایستگاه‌هایی که قطار i می‌تواند برای نماز در آنها توقف داشته باشد، مشخص می‌شود. در واقع این محدودیت‌ها به این سؤال پاسخ می‌دهند که آیا قطار i در طول مدت سفر خود به بازه نماز بر می‌خورد یا خیر؟ در مرحله بعد به دنبال آن هستیم که دریابیم آیا قطار i حتماً باید در بین راه برای نماز توقف داشته باشد یا خیر؟ برای پاسخ به این سؤال باید 2 سؤال را بررسی کنیم. سؤال اول این است که آیا قطار i قبل از حرکت از ایستگاه مبدا، فرصت کافی برای ادای نماز وعده n را دارد یا خیر؟ با اعمال محدودیت‌های (15) و (16) متغیر $QL_{i,n}$ مقدار صفر یا یک خواهد گرفت که هر یک از این مقادیر پاسخی برای سؤال اول خواهد بود.

$$X_{O_i}^d < (LL_{k,n} + TO_n) + (M \times (1 - QL_{i,n})) \quad (15)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N$$

$$X_{O_i}^d \geq (LL_{k,n} + TO_n) - (M \times QL_{i,n}) \quad (16)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N$$

در محدودیت‌های (15) و (16) متغیر صفر و یک $QL_{i,n}$ طوری عمل می‌کند که اگر زمان خروج قطار i از مبدا خود به گونه‌ای باشد که مسافران فرصت کافی برای ادای نماز نوبت n نداشته باشند، این متغیر مقدار یک خواهد گرفت و در غیر این صورت مقدار صفر خواهد گرفت. سؤال دوم که باید پاسخ داده شود، این است که آیا قطار i بعد از رسیدن به ایستگاه مقصد، فرصت کافی برای ادای نماز وعده n را دارد یا خیر؟ با اعمال محدودیت‌های (17) و (18) متغیر $QU_{i,n}$ مقدار صفر یا یک خواهد گرفت که هر یک از این مقادیر پاسخی برای سؤال دوم خواهد بود.

$$X_{D_i}^d < (LU_{k,n} - TD_n) + (M \times QU_{i,k}) \quad (17)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N$$

با توجه به جدول (1) می‌توان دریافت که ایستگاه‌هایی که هم $YL_{i,k,n}$ و هم $YU_{i,k,n}$ مقادیر یک را گرفته‌اند، همان ایستگاه‌هایی هستند که قطار i وقتی به این ایستگاه‌ها می‌رسد، در بازه نماز نوبت n قرار گرفته و می‌تواند برای نماز توقف کند، اما هنوز متغیری که بتواند به طور مستقیم تعیین کند که قطار i هنگامی که به ایستگاه k می‌رسد، آیا در بازه زمانی‌ای است که می‌تواند برای نماز نوبت n توقف داشته باشد یا خیر به دست نیامده است. به این منظور متغیر صفر و یک $Y_{i,k,n}$ تعریف می‌شود که با توجه به مقادیر $YL_{i,k,n}$ و $YU_{i,k,n}$ به نحوی که در جدول (2) آمده است عمل می‌کند.

جدول 2: رابطه مقادیر $YU_{i,k,n}$ ، $YL_{i,k,n}$ و $Y_{i,k,n}$

$YL_{i,k,n}$	0	0	1	1
$YU_{i,k,n}$	0	1	0	1
$Y_{i,k,n}$	0	0	0	1

در واقع می‌خواهیم متغیر $Y_{i,k,n}$ مقدار حاصل ضرب دو متغیر $YL_{i,k,n}$ و $YU_{i,k,n}$ را نشان دهد (به صورت رابطه 12).

$$YU_{i,k,n} \times YL_{i,k,n} = Y_{i,k,n} \quad (12)$$

به این دلیل که رابطه (12) مدل را از حالت خطی خارج می‌کند، از محدودیت‌های (13) و (14) برای رفع این مشکل استفاده می‌شود.

$$YL_{i,k,n} + YU_{i,k,n} > 1 - (M \times (1 - Y_{i,k,n})) \quad (13)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N, \forall k \in S_p, k \neq D_i, D_j$$

$$YL_{i,k,n} + YU_{i,k,n} \leq 1 + (M \times Y_{i,k,n}) \quad (14)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N, \forall k \in S_p, k \neq D_i, D_j$$

$$QF_{i,n} + QL_{i,n} \leq 1 + (M \times Q_{i,n}) \quad (20)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N$$

اکنون باید بر اساس تابع هدف مسئله، از بین ایستگاه‌هایی که قطار i برای نماز نوبت n باید انتخاب کند، یکی و فقط یکی از ایستگاه‌ها انتخاب شود. برای این منظور متغیر صفر و یک $V_{i,k,n}$ در نظر گرفته می‌شود. این متغیر در واقع امکان انتخاب شدن یا انتخاب نشدن ایستگاه k را تعیین می‌کند.

اگر متغیر $V_{i,k,n}$ مقدار یک گرفت، به این معنی است که قطار i برای نماز وعده n باید در ایستگاه k توقف کند و اگر $V_{i,k,n}$ مقدار صفر گرفت، قطار i برای نماز وعده n نباید در ایستگاه k توقف کند. برای این منظور محدودیت (21) طراحی شده است که تضمین می‌کند که ایستگاهی که توقف در آن انجام خواهد شد، به طور حتم جزو ایستگاه‌هایی باشد که قطار i در بازه نماز وعده n به آن می‌رسد.

$$V_{i,k,n} \leq Y_{i,k,n} \quad (21)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N, \forall k \in S_p, k \neq D_i, D_j$$

طبق توضیحات قبل اگر قطار i برای نماز نوبت n در ایستگاه k بتواند توقف داشته باشد، متغیر $Y_{i,k,n}$ مقدار یک خواهد گرفت، بنابراین متغیر $V_{i,k,n}$ بر اساس رابطه (21) فقط برای ایستگاه‌هایی می‌تواند مقدار یک بگیرد که متغیر متناظر $Y_{i,k,n}$ آن، مقدار یک گرفته باشد. این محدودیت تضمین می‌کند که ایستگاهی برای توقف انتخاب شود که قطار در بازه زمانی نماز به آن ایستگاه رسیده باشد. اکنون باید از بین ایستگاه‌هایی که می‌توانند برای توقف قطار i برای نماز نوبت n انتخاب شوند، یک ایستگاه را انتخاب کنیم. برای این منظور محدودیت (22) ارائه شده است.

$$\sum_{k \in S_p} (V_{i,k,n}) = Q_{i,n} \quad (22)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N, \forall k \in S_p, k \neq D_i, D_j$$

اگر مقدار متغیر $Q_{i,n}$ صفر شود، بدان معنی است که قطار i نیاز به توقف بین راهی برای نماز نوبت n را ندارد. محدودیت (22) طوری طراحی شده است که در حالتی که متغیر $Q_{i,n}$ صفر است، هیچ ایستگاهی برای توقف برای نماز انتخاب نشود و اگر متغیر $Q_{i,n}$ مقدار یک گرفته باشد، به این معنی است که قطار i برای نماز نوبت

$$X_{D_i}^d \geq (LU_{k,n} - TD_n) - (M \times (1 - QU_{i,n})) \quad (18)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N$$

در محدودیت‌های (17) و (18) متغیر صفر و یک $QU_{i,n}$ طوری عمل می‌کند که اگر زمان ورود قطار i به مقصد خود به گونه‌ای باشد که مسافران فرصت کافی برای ادای نماز نوبت n را نداشته باشند، این متغیر مقدار یک خواهد گرفت و در غیر این صورت مقدار صفر خواهد گرفت. با اعمال محدودیت‌های (15)، (16)، (17) و (18) متغیرهای $QU_{i,n}$ و $QL_{i,n}$ مقدار گرفته‌اند، اما نیاز به یک متغیر صفر و یک هست که تعیین کند، آیا قطار i باید برای ادای نماز n در بین راه توقف داشته باشد یا خیر؟ به این دلیل متغیر $Q_{i,n}$ در مدل تعریف شده است. متغیر $Q_{i,n}$ زمانی مقدار یک می‌گیرد که هر دو متغیر $QL_{i,n}$ و $QU_{i,n}$ مقدار یک گرفته باشند و در غیر این صورت مقدار صفر خواهد گرفت. جدول (3) روابط بین 3 متغیر $QU_{i,n}$ ، $QL_{i,n}$ و $Q_{i,n}$ را نشان می‌دهد.

جدول 3: رابطه‌ی مقادیر $QU_{i,n}$ ، $QL_{i,n}$ و $Q_{i,n}$

$QL_{i,n}$	0	0	1	1
$QU_{i,n}$	0	1	0	1
$Q_{i,n}$	0	0	0	1

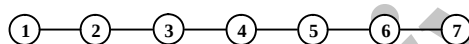
طبق جدول (3) هنگامی که هر دو متغیر $QL_{i,n}$ و $QU_{i,n}$ مقدار یک گرفته باشند، بدان معنی است که قطار i نه در مبدا خود و نه در مقصد خود، فرصت کافی برای توقف برای ادای نماز را نداشته است، بنابراین در این حالت، متغیر $QL_{i,n}$ باید مقدار یک بگیرد که نشان دهد قطار i باید برای ادای نماز نوبت n حتماً توقف بین راهی داشته باشد. اگر حتی یکی از دو متغیر $QL_{i,n}$ یا $QU_{i,n}$ مقدار صفر بگیرد، بدان معنی است که قطار i در مبدا یا در مقصد خود، فرصت توقف برای ادای نماز وعده n را داشته است، بنابراین باید متغیر $Q_{i,n}$ مقدار صفر بگیرد؛ بدان معنی که قطار i نیاز توقف بین راهی برای نماز نوبت n را ندارد. محدودیت‌های (19) و (20) با توجه به مقادیر $QU_{i,n}$ و $QL_{i,n}$ طوری عمل می‌کنند که متغیر $Q_{i,n}$ طبق جدول 3 مقدار بگیرد.

$$QF_{i,n} + QL_{i,n} > 1 - (M \times (1 - Q_{i,n})) \quad (19)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N$$

به طور تفصیلی ارائه شده و سپس مسائل با ابعاد بزرگتر حل می‌شود.

برای تشریح بهتر مدل، یک مثال ساده در این بخش ارائه می‌شود. این مثال شامل 4 قطار و 7 ایستگاه می‌شود. مبدا همه قطارها ایستگاه 1 و مقصدشان ایستگاه 7 است. اولویت همه قطارها یکسان فرض شده است. واحد زمانی بر اساس دقیقه بوده و دوره زمان‌بندی در این مثال 360 دقیقه در نظر گرفته شده است. بنابراین فقط یک وعده نماز مورد بررسی قرار گرفته است. بازه زمانی مجاز در این مثال از دقیقه 630 تا 980 مفروض است. قطار 1 در ایستگاه 4، قطار 2 در ایستگاه 3، قطار 3 در ایستگاه 5 و قطار 4 در ایستگاه 2 و 6، به مدت 15 دقیقه، توقف از پیش تعیین شده برای پیاده و سوارکردن مسافران دارند. همچنین بازه مجاز برای خروج قطار 1 از مبدا خود از دقیقه 600 تا 620، برای قطار 2 از 630 تا 660، برای قطار 3 از 680 تا 790 و برای قطار 4 از 680 تا 800 مفروض است. زمان‌های TO_n ، TI_n و TD_n به ترتیب برابر 40 دقیقه، 60 دقیقه و 60 دقیقه در نظر گرفته شده است. فرض می‌کنیم، تنها ایستگاه 3 نمازخانه داشته باشد. شکل (1) شبکه فرضی مثال ارائه شده را نشان می‌دهد.



شکل 1: شبکه فرضی مثال ارائه شده

پس از مدلسازی و حل مدل توسط نرم‌افزار LINGO نسخه 11، نتایج جدول (4) و شکل (2) به دست آمد.

n نیاز به توقف بین راهی دارد. بنابراین محدودیت (22) طوری طراحی شده که در حالتی که متغیر $Q_{i,n}$ یک است، یک و فقط یک ایستگاه از بین ایستگاه‌هایی که قطار i مجاز است برای نماز نوبت n در آن‌ها توقف داشته باشد، انتخاب شود. بدین ترتیب با اعمال محدودیت (22) ایستگاهی که قطار i برای نماز وعده n باید در آن توقف داشته باشد، تا بهترین مقدار تابع هدف به دست آید، انتخاب می‌شود. اکنون که ایستگاه مورد نظر انتخاب شده است، باید محدودیتی طراحی کنیم که قطار i برای نماز وعده n ، زمان TI_n دقیقه که همان زمان مورد نیاز برای ادای نماز است را در ایستگاه انتخاب شده توقف کند. محدودیت (23) این موضوع را تضمین می‌کند.

$$X_{i,k}^d - X_{i,k}^a \geq TI_n \times V_{i,k,n} \quad (23)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in N, \forall k \in S_p, k \neq D_i, D_j$$

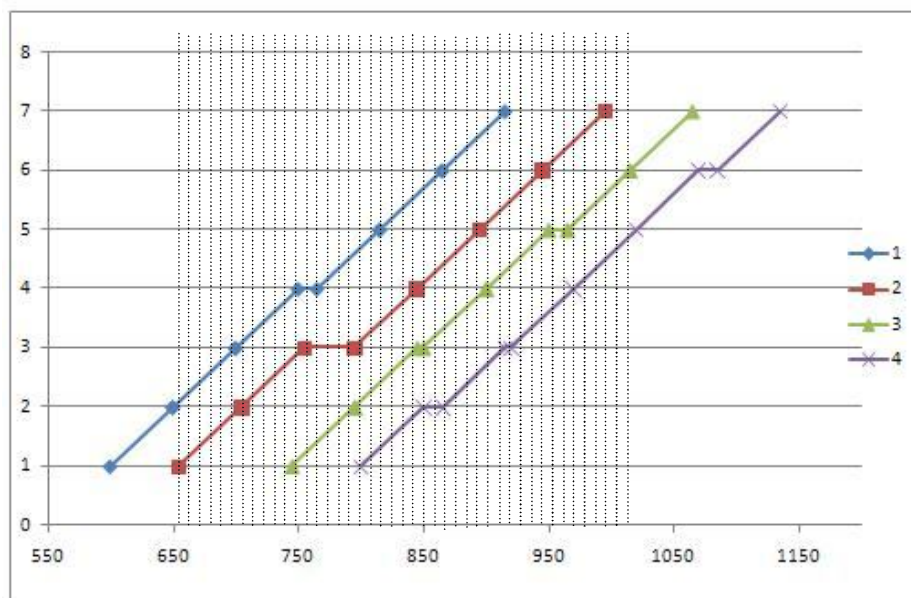
لازم به یاد آوری است که مدل ارائه شده، مدت زمان توقف در یک ایستگاه را بر اساس دو محدودیت (4) و (23) تعیین می‌کند. به عنوان مثال اگر قطار i لازم باشد که در ایستگاه k ، 15 دقیقه برای پیاده و سوار شدن مسافران بین راهی توقف داشته باشد و نیز لازم باشد که همان قطار برای ادای نماز ظهر مدت 20 دقیقه در همان ایستگاه توقف داشته باشد، در این حالت مدل طوری عمل می‌کند که قطار تنها مدت 20 دقیقه در آن ایستگاه توقف کند. در این مدت، هم فرصت کافی برای ادای نماز و هم برای پیاده و سوار شدن مسافران وجود خواهد داشت.

ارزیابی مدل پیشنهادی

برای ارزیابی مدل ارائه شده، ابتدا یک مثال کوچک

جدول 4: نتایج حل مثال هنگامی که فقط ایستگاه 3 نمازخانه دارد

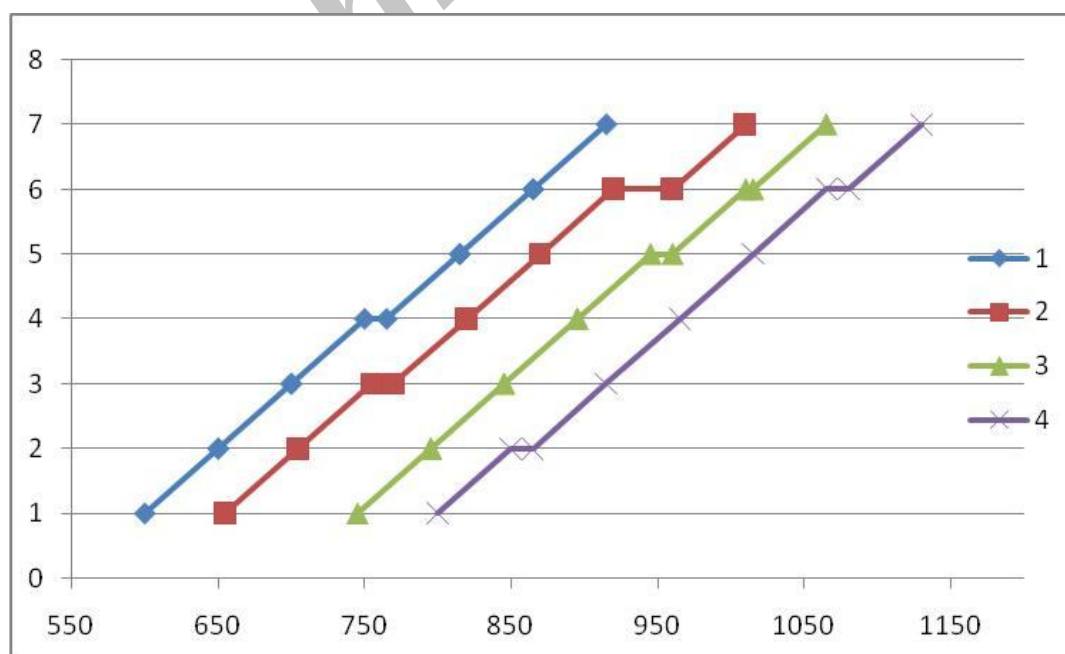
Train	Station 1			Station 2			Station 3			Station 4			Station 5			Station 6			Station 7
	$X_{i,1}^d$	$X_{i,2}^a$	Stop	$X_{i,2}^d$	$X_{i,3}^a$	Stop	$X_{i,3}^d$	$X_{i,4}^a$	Stop	$X_{i,4}^d$	$X_{i,5}^a$	Stop	$X_{i,5}^d$	$X_{i,6}^a$	Stop	$X_{i,6}^d$	$X_{i,7}^a$		
1	600	650	0	650	700	0	700	750	15	765	815	0	815	865	0	865	915		
2	655	705	0	705	755	40	795	845	0	845	895	0	895	945	0	945	995		
3	745	795	0	795	845	5	850	900	0	900	950	15	965	1015	0	1015	1065		
4	800	850	20	870	920	0	920	970	0	970	1020	0	1020	1070	15	1085	1135		



شکل 2: گراف حل شده مثال ارائه شده هنگامی که تنها ایستگاه 3 نمازخانه دارد

جدول 5: نتایج حل مثال، هنگامی که فقط ایستگاه‌های 4 و 5 و 6 نمازخانه دارند

Train	Station 1		Station 2			Station 3			Station 4			Station 5			Station 6			Station 7
	$X^d_{i,1}$	$X^a_{i,2}$	Stop	$X^d_{i,2}$	$X^a_{i,3}$	Stop	$X^d_{i,3}$	$X^a_{i,4}$	Stop	$X^d_{i,4}$	$X^a_{i,5}$	Stop	$X^d_{i,5}$	$X^a_{i,6}$	Stop	$X^d_{i,6}$	$X^a_{i,7}$	
1	600	650	0	650	700	0	700	750	15	765	815	0	815	865	0	865	915	
2	655	705	0	705	755	15	770	820	0	820	870	0	870	920	40	960	1010	
3	745	795	0	795	845	.	845	895	0	895	945	15	960	1010	5	1015	1065	
4	800	850	15	865	915	0	915	965	0	965	1015	0	1015	1065	15	1080	1130	



شکل 3: گراف حل شده مثال ارائه شده ایستگاه‌های 4 و 5 و 6 نمازخانه دارند

جدول 6: نتایج حل مثال‌هایی با ابعاد مختلف توسط نرم افزار CPLEX

تعداد قطارها	تعداد ایستگاه‌ها	تعداد وعده‌های نماز	تعداد کل متغیرها	تعداد متغیرهای صفر و یک	تعداد محدودیت‌ها	زمان حل مدل با CPLEX (sec)	جواب بدست آمده توسط CPLEX
10	50	4	14130	13120	34280	19	5300 (o)
11	50	4	16093	14982	38786	74	5890 (o)
12	50	4	18156	16944	43488	94	6340 (o)
13	50	4	20319	19006	48386	49	6870 (o)
14	50	4	22582	21168	53480	203	7435 (o)
15	50	4	24945	23430	58770	212	7875 (o)
16	50	4	27408	25792	64256	6138	8520 (o)
17	50	4	29971	28254	69938	10800	9180 (t)
18	50	4	32634	30816	75816	10800	9560 (t)
20	50	4	38260	36240	88160	10800	(x)
30	50	4	72390	69360	161640	10800	(x)

مسائل بزرگ می‌شوند، حتی نرم‌افزار CPLEX هم قادر به حل آن‌ها در زمان مطلوب نیست، در جدول 6 مشاهده می‌شود که از مسئله با 17 قطار و 50 ایستگاه به بعد، نرم‌افزار کارایی لازم را ندارد.

نتیجه‌گیری

در ایران به دلیل وجود محدودیت توقف اجباری برای ادای فریضه نماز و نبود یک مدل جامع برای برآورده کردن محدودیت ذکرشده، زمان‌بندی حرکت قطارها توسط کارشناسان به طور غیر مکانیزه انجام می‌گیرد. در این مقاله یک مدل ریاضی برای زمان‌بندی حرکت قطارهای مسافری در مسیرهای دوخطه راه آهن جمهوری اسلامی ایران ارائه شد. نوآوری در مدل پیشنهادی، بررسی شرط لزوم توقف در ایستگاه‌های بین راهی که نمازخانه دارند، برای قطارهای مسافری برای ادای فریضه نماز و

اگر همین مثال را برای حالتی که ایستگاه شماره 3 نمازخانه نداشته باشد و ایستگاه‌های 4، 5 و 6 نمازخانه داشته باشند حل شود، نتایج جدول (5) و شکل (3) به دست می‌آید.

در ادامه، 11 مسئله با ابعاد بزرگ‌تر حل شده است که نتایج آن در جدول (6) آورده شده است.

در جدول (6) در ستون "جواب به دست آمده توسط CPLEX" در مقابل هر یک از مقادیر تابع هدف، یکی از حروف (o)، (t) و (x) دیده می‌شود که (o) به معنی بهینه‌بودن مقدار به دست آمده و (t) بدین معنی است که پس از گذشت 3 ساعت (10800 ثانیه)، جواب اولیه‌ای توسط نرم‌افزار پیدا شده، ولی به جواب بهینه نرسیده است و (x) بدان معنی است که پس از گذشت مدت زمان تعیین شده حتی جواب اولیه هم به دست نیامده است. با توجه به جدول (6) مشخص می‌شود هنگامی که ابعاد

حالت‌های مختلف برای ایستگاه‌های شبکه راه‌آهن از نظر داشتن نمازخانه بررسی شده است. در این مثال نشان داده شده است که مدل پیشنهادی در شرایط مختلف بهترین ایستگاه دارای نمازخانه را برای توقف قطارها انتخاب می‌کند.

مسائل نمونه با ابعاد بزرگ‌تر با استفاده از نرم‌افزار CPLEX حل شده است. هر چه تعداد قطارها افزایش می‌یابد، زمان حل به صورت نمایی بالا می‌رود؛ تا جایی که برای مسئله با ابعاد 20 قطار و 50 ایستگاه به بالا امکان به دست آوردن جواب شدنی توسط نرم افزار CPLEX در زمان 3 ساعت وجود نداشت.

با ایجاد یک سیستم پشتیبان تصمیم و استفاده مدل پیشنهادی در آن، می‌توان زمان‌بندی حرکت قطارهای مسافری را به صورت کامپیوتری و خودکار انجام داد. برای انجام مطالعات بعدی پیشنهاد می‌شود برای حل مسائل با ابعاد بزرگ، از روش‌های حل مبتنی بر الگوریتم‌های فرا ابتکاری استفاده شود.

انتخاب بهترین ایستگاه برای توقف است که باعث ایجاد کمترین تأخیر در مجموع زمان سیر قطارها می‌شود.

در تنها تحقیقی که تا کنون به موضوع زمان‌بندی حرکت قطارها با در نظر گرفتن محدودیت توقف برای ادای فریضه نماز پرداخته، قطارها برای ادای فریضه نماز در اولین ایستگاه نمازخانه‌داری که می‌توانند برای نماز توقف داشته باشند، توقف خواهند کرد. در این پژوهش قطارها در اولین ایستگاهی که ممکن باشد، برای ادای فریضه نماز توقف می‌کنند و نه در بهترین ایستگاه ممکن که زمان کل سفرها را کمینه کند. اما در مدل ارائه شده در این مقاله، محدودیت توقف اجباری در بین مسیر برای ادای نماز، طوری طراحی شده است که ایستگاه انتخابی برای توقف قطار برای نماز، باعث ایجاد کم‌ترین تأخیر در مجموع زمان سفر همه قطارها شود. به تعبیر دیگر، مدل، ایستگاه بهینه را برای توقف برای نماز انتخاب می‌کند.

برای ارزیابی مدل پیشنهادی یک مثال به طور مفصل و 11 مسئله نمونه حل شده است. در مثال حل شده،

مراجع

- 1- Yaghini, M. and Lesan, J. (2010). *Rail Operations Planning*. Iran University of Science and Technology, Tehran.
- 2- Higgins, A., Kozan, E. and Ferreira, L. (1996). "Optimal scheduling of trains on a single line track." *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 30, PP. 147-161.
- 3- Higgins, A., Kozan, E. and Ferreira, L. (1997). "Heuristic techniques for single line train scheduling." *Journal of Heuristics*, Vol. 3, PP. 43-62.
- 4- Kraay, D.R., Harker, P.T. and Chen, B. (1991). "Optimal pacing of trains in freight railroads: model formulation and solution." *Operations Research*, Vol. 39, PP. 82-99.
- 5- Ghoseiri, K., Szidarovszky, F. and Asgharpour, M.J. (2004). "A multi-objective train Scheduling model and solution." *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 38, PP. 927-952.
- 6- Ping, R., Nan, L., Liqun, G., Zhiling, L. and Yang, L. (2005). "Application of particle swarm optimization to the train scheduling for high-speed passenger railroad planning." *IEEE International Symposium on Communications and Information Technology*, Sch. of Inf. Sci. & Eng., Northeastern Univ., Shenyang, China.
- 7- Ghoseiri, K. and Morshedsolouk, F. (2006). "ACS-TS: Train scheduling Using Ant Colony System." *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, Vol. 95, PP. 1-28.
- 8- Pour Seyed Aghayi, M. (1998). *Train Scheduling on Single Rail Lines*. PhD. Dissertation, Tarbiat Modares University, Department of Industrial Engineering, Tehran.
- 9- D'Ariano, A., Pacciarelli, D. and Pranzo, M. (2006). "A branch and bound algorithm for scheduling trains in a railway network." *European Journal of Operational Research*, Vol. 183, PP. 643-657.

- 10- Burdett, R.L. and Kozan, E. (2008). "A disjunctive graph model and framework for constructing new train schedules." *European Journal of Operational Research*, Vol. 200, PP. 85–98.
- 11- Lee, Y. and Chen, CH-Y. (2009). "A heuristic for the train pathing and timetabling problem." *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 43, PP. 837–851.
- 12- Zhou, X. and Zhong, M. (2007). "Single-track train timetabling with guaranteed optimality: Branch-and-bound algorithms with enhanced lower bounds." *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 41, PP. 320–341.
- 13- Castillo, E., Gallego, I., Ure?a, J.M. and Coronado, J. M. (2011). "Timetabling optimization of a mixed double- and single-tracked railway network." *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 35, PP. 859–878.
- 14- Murali, P., Dessouky, M., Ordez, F. and Palmer, K. (2009). "A delay estimation technique for single and double-track railroads." *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Vol. 46, PP. 483–495.
- 15- Schlechte, T. (2011). "Railway track allocation - simulation and optimization." RailRome2011, The 4th International Seminar on Railway Operations Modelling and Analysis (to appear).
- 16- Kuo, A., Miller-Hooks, E. and Mahmassani, H. (2010). "Freight train scheduling with elastic demand." *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Vol. 46, PP. 1057–1070.
- 17- Cheng, Y. (1998). "Hybrid simulation for resolving resource conflicts in train traffic rescheduling." *Computers in Industry*, Vol. 35, No. 3, PP. 233–246.
- 18- Petersen, E.R. and Taylor, A.J. (1982). "A structured model for rail line simulation and optimization." *Transportation Science*, Vol. 16, No. 2, PP. 192–206.
- 19- Dorfman, M.J. and Medanic, J. (2004). "Scheduling trains on a railway network using a discrete event model of railway traffic." *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 38, No. 1, PP. 81–98.
- 20- Cai, X., Goh, C.J. and Mees, A.I. (1998). "Greedy heuristics for rapid scheduling of trains on a single track." *IIE Trans*, Vol. 30, No. 5, PP. 481–493.
- 21- Caprara, A., Fischetti, M. and Toth, P. (2002). "Modeling and solving the train timetabling problem." *Oper. Res.* Vol. 50, No.5, PP. 851–861.
- 22- Khadem Sameni, M. (2008). Train timetabling on double lines. MSc. Thesis, Tarbiat Modares University, Department of Industrial Engineering, Tehran.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1-Train Timetabling
- 2- Genetic Algorithm
- 3- Travelling Salesman Problem
- 4-Ant Colony Optimization
- 5-Job Shop Scheduling
- 6-Train Routing